1М

УДК 517.988

А.С. Миненко
Государственный университет информатики и искусственного интеллекта,
г. Донецк, Украина
minenko@iai.donetsk.ua

Математическое моделирование процессов кристаллизации металла

Исследуется пространственная задача Стефана с учетом конвективного движения и примесей в жидкой фазе. Получено уравнение свободной границы.

1. Работа посвящена изучению процессов кристаллизации двухкомпонентных сред в случае, когда распространение тепла связано не только с теплопроводностью, но и с конвективным переносом, присутствующим в жидкой фазе вещества. Рассматриваемая задача включает в себя как двухфазную задачу Стефана, так и начально-краевую задачу для системы Навье-Стокса, описывающую движение вязкой несжимаемой жидкости в нецилиндрической области. При изучении задачи учитывается скачек плотности вещества на границе раздела фаз.

Для описания поля скоростей в зоне поступления перегретого металла используется математическая модель затопленной струи вязкой жидкости, основанная на известном в теоретической гидродинамике точном решении нелинейной системы дифференциальных уравнений Навье-Стокса, а поскольку в затопленной струе перемешивание можно охарактеризовать так называемой свободной турбулентностью, характеризующейся одним числовым параметром – коэффициентом «кажущейся», или турбулентной, вязкости V_T, полученные формулы можно интерпретировать как в ламинарном, так и в турбулентном приближениях.

Упомянутое решение системы Навье-Стокса имеет полярную особенность в начале координат и обладает осевой симметрией, а его функциональная структура на столько проста, что для соответствующего уравнения конвективной теплопередачи удается получить решение с двумя произвольными вещественными параметрами, определение которых приводит к полному описанию температурного поля в пределах исследуемой зоны. В сферической системе координат (r, θ, φ,) радиальная и азимутальная компоненты скорости выражаются по формулам

$$u = \frac{\nu}{r\sin\theta} f'(\theta),\ V = \frac{\nu}{r\sin\theta} f(\theta),\ f(\theta) = \frac{2\sin^2\theta}{a+1-\cos\theta},$$

в которых ν – кинематическая вязкость среды, а параметр a однозначно выражается через полный поток импульса P рассматриваемой струйки, причем

$$a = \frac{16\pi\nu^2\rho}{P} - 1, \quad \text{если} \quad P \ll 1, \quad a = \frac{552\nu^4\beta^2}{P^2}, \quad \text{если} \quad P \gg 1,$$

где ρ – плотность жидкости. Полный поток импульса струи P можно приближенно посчитать по формуле

$$P = GV_\infty,$$

где G – количество поступающего расплавленного металла за одну секунду, а V_∞ – абсолютное значение скорости движущегося вниз металла на оси кристаллизатора в точке входа струйки в металлическую ванночку. Температурное поле описывается формулой

$$T(r,\theta)=\frac{B}{r}\left(\frac{a}{a+1-\cos\theta}\right)^{2\sigma}+C,$$

в которой $\sigma=\nu\rho c/\lambda$ – число Прандтля, характеризующее свойство жидкой среды, а B и C – вещественные параметры интегрирования, однозначно определяющиеся через тепловую интенсивность $Q=GcT_\infty$, нагретой до температуры T_∞ струйки и число Нуссельта $\omega_0=\alpha R/\lambda$.

Вычисления показывают, что

$$C=T^{\circ}+\frac{B}{R}\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2\sigma}\left(\frac{1}{\alpha R}-1\right),$$

где T° – температура внешней относительна кристаллизатора среды, а постоянная B в силу асимптотических соотношений определяется по формулам:

$$\left(\frac{Q}{4\pi\rho c\nu}\right)=B\frac{8\sigma}{3a(a+2)},\qquad \text{если}\quad P \,\square\, 1,$$

$$\left(\frac{Q}{8\pi\rho c\nu}\right)=B(1-a^{2\sigma}),\qquad \text{если}\quad P \,\square\, 1.$$

Каждая линия тока рассматриваемого поля скоростей имеет единственную ближайшую к оси кристаллизатора точку и все такие точки лежат на одной и той же прямой, имеющей некоторый угол наклона θ_0 к оси симметрии, а вращение той прямой вокруг оси описывает конус – боковую границу рассматриваемой зоны. Другим характерным размером зоны является глубина r_* жидкой ванночки вдоль оси кристаллизатора. Как показывают непосредственные вычисления, θ_0 и r_* определяются из формул

$$\cos\theta_0=\frac{1}{a+1},\ r_*=\frac{B}{T^*-C},$$

где T^* – температура кристаллизации.

Для иллюстрации приведенных формул предположим, что высота шлаковой ванночки равна 10 см, а плотность шлака в 2,5 раза меньше плотности металла, и поскольку металл поступает в виде серии капель приблизительно 7 грамм (следовательно, и масса капли равна $m_к\approx 7$ г), то каждая из них, если учитывать только силы тяжести и архимедовы силы, в момент соприкосновения с зеркалом жидкого металла имеет скорость около 110 см/с и несет импульс $P_к$ = 770 г см/с. Производительность печи в одну тонну веса в час соответствует G = 280 грамм веса в секунду, следовательно, в одну секунду выпадает около 40 капель, суммарный поток импульса которых равен приблизительно $P=3\times10^4$ г см/с^2. И для того случая, когда все капли сливаются в сплошную струйку вдоль оси кристаллизатора, несущую поток импульса $P=3\times10^4$ г см/с^2, и для того случая, когда в некоторую точку за каждую секунду опускается одна капля с импульсом $P_к$ = 770 г см/с, формула $\cos\theta_0=\dfrac{1}{a+1}$ дает нулевой угол θ_0, следовательно, зона интенсивного перемешивания на значительной глубине жидкой металлической ванночки имеет вид цилиндра, радиус которого, как показывают наблюдения за зоной интенсивного каплепадения, равен приблизительно одной трети радиуса электрода.

Если считать, что металл поступает перегретым на 150° С, так что его температура приблизительно равна $T_\infty = 1650^\circ$ С, то по указанной выше формуле получаем тепловую интенсивность $Q = 3,9 \times 10^4$ кал/с. Пользуясь формулами, получаем $r_* \approx 7R$, если при этом принять во внимание, что для расплавленных металлов молекулярная вязкость приблизительно равна $\nu = 5 \times 10^{-3}$ см/с, а число Прандтля имеет близкое к 0,08 значение. Применительно к ЭШП полученная величина имеет условный характер, прежде всего потому, что металл в этом случае поступает не в виде сплошной струйки, а в виде серии капель. Применяя предыдущие формулы и расчеты к случаю, когда в одну и ту же точку ежесекундно падает одна капля с указанными параметрами, получим $r_* \approx 0,17R \approx 8,5$ см, то есть около одной пятой радиуса. Истинная глубина при ЭШП, несомненно, больше, поскольку мы не учли теплопередачи к жидкому металлу со стороны высокотемпературной шлаковой ванночки.

Существенную поправку к указанным величинам вносит эффект турбулентности, который в рассматриваемом случае «свободной турбулентности» описывается коэффициентом «кажущейся» вязкости V_T. Согласно известной формуле $V_T = 11 \cdot 10^{-3}\sqrt{K}$, где $K = \dfrac{P}{\rho}$ – поток кинематического импульса. Для случая струйного течения получаем V_T = 0,215, т.е. $V_T \approx 140\nu$, тогда, как в случае серии капель, весьма правдоподобным является соотношение $V_T \approx 10\nu = 5 \times 10^{-2}$ см^2/с.

Переходя к турбулентному переносу тепла, примем в соображение, что соответствующий коэффициент вдвое превосходит коэффициент турбулентного переноса импульса. Уравнение энергии в турбулентном потоке в этом случае характеризуется «кажущимся коэффициентом теплопроводности» $K = 2V_T + K$, где K – «коэффициент молекулярной температуропроводности», а соответствующее число Прандтля равно $\sigma_T = \dfrac{V_T}{(K + 2V_T)}$. В разобранных выше случаях имеем $\sigma_T \approx 0,5$ для струйки и $\sigma_T \approx 0,31$ для серии капель, что в первом случае дает $r_* = 3,5\,\text{см} = 7 \times 10^{-2} R$, а во втором $r_* \approx 1,2\,\text{см} = 2,4 \times 10^{-2} R$. В условиях ЭШП эти величины увеличиваются из-за потока тепла со стороны ванночки жидкого шлака.

2. Пусть Ω_0 – заданная область в R^3, граница которой состоит из двух замкнутых связанных гладких поверхностей Γ_0^+ и Γ_0^-, не имеющих самопересечений. Пусть, далее Γ_0 – гладкая замкнутая поверхность, лежащая внутри Ω_0, такая, что Γ_0^- лежит внутри ограниченной области, границей которой является Γ_0. Поверхность Γ_0 разбивает Ω_0 на две подобласти Ω_0^+ и Ω_0^-, которые в начальный момент *t = 0* заняты жидкой и твердой фазами соответственно. Будем обозначать через $\Omega_t^\pm$ область занятую жидкой (твердой) фазой в момент времени *t.* Заметим, что в процессе кристаллизации проходит изменение границы Γ_0^+ (это связано с тем, что жидкая и твердая фазы имеют разные плотности), а граница Γ_0^- остается неизменной. Задача состоит в определении областей Ω_t^+ и Ω_t^- (т.е. границ Γ_t^+ и Γ_t), занимаемых твердой и жидкой фазами соответственно в момент времени $t \in [0, T]$, вектора скорости

$\vec{V}(x,t)=(V_1(x,t),V_2(x,t),V_3(x,t))$, давления $p(x,t)$, концентрации примеси $c(x,t)$, распределений температур жидкой $u^+(x,t)$ и твердой $u^-(x,t)$ фаз по следующим условиям:

$$\frac{\partial u^+(x,t)}{\partial t}+(\vec{V}\nabla)u^+(x,t)-a_+^2\nabla^2u^+(x,t)=0,(x,t)\in D_T^+;\ \frac{\partial u^-(x,t)}{\partial t}-a_-^2\nabla^2u^-(x,t)=0,\ (x,t)\in D_T^-,$$

$$\frac{\partial \vec{V}(x,t)}{\partial t}+(\vec{V}\nabla)\vec{V}(x,t)+\nabla p(x,t)=\nu\nabla^2\vec{V}(x,t)+\vec{f}(u^+,c),\nabla\vec{V}(x,t)=0,(x,t)\in D_T^+,$$

$$\vec{V}(x,0)=\vec{C}(x);T(\vec{V},p)\vec{n}=-q(x,t)\vec{n},\ (x,t)\in\Gamma_t^{\ +};V_n=-(1-\frac{\rho^-}{\rho^+})W_n;V_\tau=0,\ (x,t)\in\Gamma_t,$$

$$u^\pm(x,t)=B^\pm(x,t),\ (x,t)\in\Gamma_t^{\ +}\cup\Gamma_0^{\ -};\ u^\pm(x,0)=A^\pm(x); \tag{1}$$

$$u^+=u^-=T^*-\varepsilon c,k_-\frac{\partial u^-}{\partial n}-k_+\frac{\partial u^+}{\partial n}=\chi\rho^+W_n,\ (x,t)\in\Gamma_t,$$

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial t}+(\vec{V}\nabla)c(x,t)-\gamma\nabla^2c(x,t),(x,t)\in D_T^{\ +};c(x,0)=g_0(x),$$

$$c(x,t)=g(x,t),(x,t)\in\Gamma_t^{\ +};-\alpha\frac{\partial c}{\partial n}=\beta cW_n,(x,t)\in\Gamma_t.$$

Здесь $D_T^{\ \pm}=\{(x,t):x\in\Omega^\pm{}_t,t\in(0,T)\}$, $x=(x_1,x_2,x_3)$, $\Omega^\pm{}_t$ – области соответственно жидкой и твердой фаз, $\partial\Omega^+=\Gamma_t\cup\Gamma^+{}_t$, $\partial\Omega^-=\Gamma^-{}_0\cup\Gamma_t$, $\vec{n}$ – нормаль к Γ_t, направленная в сторону $\Omega^+{}_t$; T^*, ν, ε, χ, ρ^+, ρ^-, α, β, γ, κ_-,κ_+ – положительные постоянные, $\nabla=(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3})$, $T(\vec{V},p)$ – тензор напряжений с элементами $T_{ij}=-\delta_{ij}p+\nu(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}+\frac{\partial V_j}{\partial x_i})$, W_n – скорость движения фронта кристаллизации в направлении нормали $\vec{n}$, V_n и V_τ – нормальная и тангенциальная составляющие $\vec{V}$. Если $\Phi(x,t)=u^\pm(x,t)+\varepsilon c(x,t)-T^*=0$ – уравнение поверхности Γ_t, тогда $W_n=-\Phi_t/|\nabla\Phi|$, $\vec{n}=\dfrac{\nabla(u^\pm+\varepsilon c)}{|\nabla(u^\pm+\varepsilon c)|}$.

Укажем, что условие Стефана можно представить также в виде: $\kappa_-^{\ 2}|\nabla u^-|^2-$ $-\kappa_+^{\ 2}|\nabla u^+|^2+2\varepsilon\kappa_-^{\ 2}(\nabla u^-,\nabla c)-2\varepsilon\kappa_+^{\ 2}(\nabla u^+,\nabla c)=\chi\rho^+(\kappa_-u^-{}_t+\kappa_+u^+{}_t)$, $(x,t)\in\Gamma_t$.

Предполагается, что $A(x)\in H^{4+\alpha}(\overline{\Omega}_0^{\ +})$, $C(x)\in H^{2+\alpha}(\Omega_0^{\ +})$, $B^\pm(x,t)\in H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_t^{\ +}\cup\Gamma_0^{\ -}\times$ $\times[0,T])$, $\vec{f}(u^+,c)\in C^1(R^2)$, $g(x,t)\in H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_t^{\ +}\times[0,T])$, $g_0(x)\in H^{4+\alpha}(\overline{\Omega}_0^{\ +})$. При этом $g(x,t)$ и $g_{x_i}(x,t)$ должны быть функциями класса $H^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(R^3\times[0,T])$. Предполагается также выполненными условия согласования до первого порядка включительно, которые следуют из предположения существования гладкого решения и формулируются аналогично [1, с. 268, с. 363].

Отметим, что при малых значениях *t*, задача (1) разрешима в классе гладких функций $u^\pm\in H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\overline{D_T^{\ \pm}})$, $\vec{V}\in H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\overline{D_T^{\ \pm}})$, $C\in H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\overline{D_T^{\ \pm}})$, $\nabla p\in H^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{D_T^{\ \pm}})$, а границы $\Gamma^+{}_t$ и Γ_t описываются функциями, принадлежащими классам $H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}$ [2].

Решение задачи (1) моделирует процесс кристаллизации вещества с учетом переноса примеси в жидкой фазе. При этом последнее условие в (1) следует из закона Нернста, а $\vec{f}(u^+,c)$ описывает влияние неравномерного распределения температуры и концентрации примеси на движение жидкости.

3. Известно, что свободные границы Γ_t и Γ_t^+ можно представить в виде $\Gamma_t =$ $= \{x = x(\omega) + \vec{n}(\omega)\rho(\omega,t)\}$, $\Gamma_t^+ = \{x = x(\omega^*) + \eta(\omega^*,t)\vec{n}(\omega^*)\}$, где $\omega = (\omega_1,\omega_2)$, $\omega^* = (\omega^*_1,$ $\omega^*_2)$, $x(\omega) \in \Gamma_0$, $x(\omega^*) \in \Gamma_0^+$, $\rho(\omega,t)$ и $\eta(\omega^*,t)$ – некоторые функции соответственно классов $H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_0 \times [0,T])$ и $H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_0^+ \times [0,T])$, $\rho(\omega,0) = 0$ и $\eta(\omega^*,0) = 0$ [2].

Предложен метод решения задачи (1), состоящий в разложении решения в ряд по степеням малых чисел ε:

$$u^{\pm}(x,t;\varepsilon) = u^{\pm}_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k u^{\pm}_k(x,t),\ p(x,t;\varepsilon) = p_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k p_k(x,t),$$

$$V_i(x,t;\varepsilon) = V_{i0}(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k V_{ik}(x,t), i = 1,2,3;\ \rho(\omega,t;\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k \rho_k(\omega,t), \tag{2}$$

$$c(x,t) = c_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k c_k(x,t).$$

Для нулевого приближения $u^{\pm}_0(x), \vec{V_0}(x) = (V_{10}(x), V_{20}(x), V_{30}(x))$, Γ_0 и $c_0(x)$ из условий (1) и разложения (2) вытекает следующая задача:

$$(\vec{V_0}\nabla)\vec{V_0}(x) + \nabla p_0(x) = \nu\nabla^2\vec{V_0}(x) + \vec{f}(u_0,c_0),\ \ x \in \Omega_0^+,$$

$$\nabla\vec{V_0}(x) = 0,\ x \in \Omega_0^+,\ T(\vec{V_0},p_0)\vec{n} = -q(x)\vec{n},\ \ x \in \Gamma_0^+,\ V_n = -(1 - \frac{\rho^-}{\rho^+})W_n,\ \ V_\tau = 0,$$

$$x \in \Gamma_0;\ (\vec{V_0}\nabla)u_0^+ - a_+^2\nabla u_0^+ = 0,\ x \in \Omega_0^+,\ u_0^{\pm}(x) = B^{\pm}(x),\ x \in \Gamma_0^+ \cup \Gamma_0^-, \tag{3}$$

$$u_0^-(x) = u_0^+(x) = T^*,\ x \in \Gamma_0;\ k_-\frac{\partial u_0^-}{\partial n} - k_+\frac{\partial u_0^+}{\partial n} = 0,\ x \in \Gamma_0,\ \ \nabla^2 u_0^- = 0,\ \ x \in \Omega_0^-,$$

$$(\vec{V_0}\nabla)c_0 - \gamma\nabla^2 c_0 = 0,\ \ x \in \Omega_0^+,\ c_0(x) = g_0(x),\ \ x \in \Gamma_0^+;\ -\alpha\frac{\partial c_0}{\partial n} = 0,\ \ x \in \Gamma_0.$$

Здесь ради простоты предполагается, что функции $B^{\pm}$ и q зависят только от переменной *x*.

Лемма 1. Пусть функции $u_0^{\pm}(x) = A^{\pm}(x)$, $\vec{V_0}(x) = \vec{C}(x)$, $c_0(x) = g_0(x)$ являются решением задачи (3) соответственно в области $\Omega_0^{\pm}$ и Ω_0^+. Тогда эти функции можно взять в качестве нулевого приближения задачи (1).

4. Далее, пусть

$$Q_T^{\pm} = \Omega_0^{\pm} \times [0,T],\ \Gamma_{0T}^- = \Gamma_0^- \times [0,T],\ \Gamma_{0T}^+ = \Gamma_0^+ \times [0,T],\ \Gamma_{0T} = \Gamma_0 \times [0,T].$$

Рассмотрим первое приближение $(\vec{V_1}, u_1^{\pm}, p_1, \rho_1, c_1)$ задачи (1) для малых чисел ε.

Имеем:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \overrightarrow{V_1}}{\partial t}+(\overrightarrow{V_1}\nabla)\overrightarrow{V_0}+(\overrightarrow{V_0}\nabla)\overrightarrow{V_1}+\nabla p_1=\nu\nabla^2\overrightarrow{V_1}+f_u^{'}(u_0^+,c_0)u_1^++\overrightarrow{f_C^{'}}(u_0^+,c_0)c_1,(x,t)Q^+{}_T;\\ \nabla\overrightarrow{V_1}=0,(x,t)\in Q_T{}^+;\\ T(\overrightarrow{V_0}+\overrightarrow{V_1},p_1)\vec{n}=0,x\in\Gamma_0{}^+,\overrightarrow{V_1}(x,0)=0,\\ V_{1n}=(1-\dfrac{\rho^-}{\rho^+})\dfrac{u_{1t}{}^+}{|\nabla u_0{}^+|},V_{1\tau}=0,x\in\Gamma_0;\end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_1^+}{\partial t}+(\overrightarrow{V_1}\nabla)u_0^++(\overrightarrow{V_0}\nabla)u_1^+-a_+{}^2\nabla^2u_1^+=0,(x,t)\in Q_T{}^+;\dfrac{\partial u_1^-}{\partial t}+a_-{}^2\nabla^2u_1^-=0,(x,t)\in Q_T{}^-,\\ u^\pm(x,0)=0;u_1{}^\pm(x,t)=0,(x,t)\in\Gamma^-{}_{0T}\cup\Gamma^+{}_{0T},\\ u^\pm{}_1=u^-{}_1,\qquad k_-\dfrac{\partial u^-{}_1}{\partial n}-2k_+\dfrac{\partial u^+{}_1}{\partial n}+k_-\dfrac{\partial c}{\partial n}+f_1(x,t)=\chi\rho^+\dfrac{\partial\rho_1}{\partial t},\qquad (x,t)\in\Gamma_{0T};\end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial c_1}{\partial t}+(\overrightarrow{V_1}\nabla)c_0+(\overrightarrow{V_0}\nabla)c_1-\gamma\nabla^2c_1=0,(x,t)\in Q_T{}^+,\\ c_1(x,0)=0,c_1(x,t)=0,(x,t)\in\Gamma^+{}_{0T},\\ -\alpha\dfrac{\partial c_1}{\partial n}=f_2(x,t),\qquad (x,t)\in\Gamma_{0T},\qquad f_2(x,t)=c_0\dfrac{u^+{}_t}{|\nabla u^+{}_0|},\\ \dfrac{\partial c_0(x)}{\partial n}\eta_1(\omega,t)+c_1\ (x,t)=0,\qquad (x,t)\in\Gamma^+{}_{0T}.\end{cases} \tag{6}$$

Зададим теперь $\vec{V}=\vec{V}_1(x,t)$. Затем решим задачу (5), (6) и найдем $u^\pm,c,\rho$. После чего заменим $u^\pm,c,\rho$ – решением задачи (5), (6) и решим задачу (4), являющуюся начально-краевой задачей для системы Навье-Стокса. Затем, используя новое значение $V(x,t)$, снова решаем задачу (5) и (6) и т.д. Таким образом, получим процесс последовательных приближений. Доказательство сходимости этого процесса аналогично приведенному в работе [3]. При этом при заданном $\rho_1(\omega,t)\in H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_{0T})$ найдем функции $u^\pm{}_1(x,t;\rho)\in H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\overline{Q^\pm{}_T})$, $c{}_1(x,t;\rho)\in H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\overline{Q^\pm{}_T})$, как единственное решение задачи (5), (6) [1], причем $\rho_1(\omega,t)$ находим как неподвижную точку сжимающегося оператора M_1: $M_1\rho_1=\dfrac{1}{\chi\rho^+}\int\limits_0^t(k_-\dfrac{\partial u^-{}_1}{\partial n}-2k_+\dfrac{\partial u^+{}_1}{\partial n}+k_-\dfrac{\partial C}{\partial n}+f_1(x,t))dt,\ x(\omega)\in\Gamma_{0T}$.

Имеют место следующие утверждения.

Лемма 2. Пусть выполнено условие $|\nabla A^+(x)|=\dfrac{\partial g_0(x)}{\partial n}$ на Γ_0. Тогда оператор M_1, действующий из $H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_{0T})$ в $H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_{0T})$, имеет там неподвижную точку.

Лемма 3. В качестве первого приближения задачи (1) можно взять решение задачи (4) – (6): $u_1{}^\pm(x,t),c_1\ (x,t),\overrightarrow{V_1}\ (x,t),p_1\ (x,t),\rho_1\ (x,t)$.

Теорема. Пусть $\frac{\partial g_0(x)}{\partial n} \neq 0$ на $\Gamma_0^{\ +}$. Тогда при малых числах ε и достаточно малых значениях *t* справедливы формулы:

$$\Gamma_t : x = x(\omega) - \varepsilon \vec{n} \frac{u_1^{\pm}(x(\omega),t)}{|\nabla A^{\pm}(x(\omega))|} + o(\varepsilon), (x,t) \in \Gamma_{0T},$$

$$\Gamma_t^{\ +} : x = x(\omega^*) - \varepsilon \vec{n} \frac{c_1(x(\omega),t) + g_0(x(\omega)) - g(x(\omega),t)}{\frac{\partial g_0(x(\omega))}{\partial n}} + o(\varepsilon), (x,t) \in \Gamma_{0T}^{\ +},$$

где $u_1^{\pm}(x,t)$, $c_1\ (x,t)$, $\rho_1\ (\omega,t)$, $\eta_1\ (\omega,t)$ – функции класса $H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}$, являющиеся решением задачи (4) – (6).

Литература

1. Ладыженская О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. – М. : Наука, 1967. – 756 с.
2. Миненко А.С. Вариационные задачи со свободной границей / Миненко А.С. – К. : Наукова думка, 2005. – 341 с.
3. Солонников В.А. Разрешимость задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости, ограниченной свободной поверхностью / В.А. Солонников // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1977. – 41, № 6. – С. 1388-1424.
4. Патон Б.Е. Избранные труды / Б.Е. Патон // Тр. Ин-та электросварки им. Е.О. Патона НАН Украины. – 2008. – 893 с.

О.С. Міненко

Математичне моделювання процесів кристалізації металу

Досліджується просторова задача Стефана з урахуванням конвективних рухів і домішок у рідинній фазі. Доведено рівняння вільної границі.

A.S. Minenko

Mathematical Modeling of the Processes Crystallization of Metal

The three dimensional convection Stefan problem in liquid phase is investigated. Formula of free boundary equation is obtained.

Статья поступила в редакцию 02.03.2010.